Bertrand Russell, géomètre ou logicien ? Comment situer son Essay on the Axioms of Geometry (1897) dans le contexte anglais de la fin du 19ème siècle ?

Marie-José Durand-Richard
Université Paris 8

Dominique Flament (dir)
Série *Documents de travail* (Équipe F_2DS)
Histoires de géométries : textes du séminaire de l'année 2002,
Paris, Fondation Maison des Sciences de l'Homme, 2003

Bertrand Russell, géomètre ou logicien ?
Comment situer son *Essay on the Axioms of Geometry* (1897)
dans le contexte anglais de la fin du 19ème siècle ?

Marie-José Durand-Richard (Paris 8-REHSEIS)

Bertrand Russell (1872-1970) est essentiellement connu pour sa participation décisive au projet logiciste, depuis sa correspondance de 1902 avec Gottlob Frege (1848-1925), où il lui signale le paradoxe qui ruine son projet d'explicitation des lois fondamentales de l'arithmétique, jusqu'aux *Principia Mathematica*, écrits avec son maître Alfred North Whitehead (1861-1947), qui en constituent une étape majeure. Son premier travail est cependant, dès la fin de ses études universitaires en 1895, une dissertation de géométrie, intitulée *An Essay on the Foundations of Geometry*, publiée en 1897, qui interroge la question des fondements, de la géométrie cette fois, relativement à l'existence de plusieurs géométries. Elle suscite immédiatement l'intérêt de Louis Couturat (1868-1914), une polémique avec Henri Poincaré (1854-1912), et se trouve rapidement traduite en français dès 1901 avec des notes de Couturat. Au-delà du simple étonnement que représente cette manifestation de Russell d'abord comme géomètre, et non comme logicien, une première interrogation peut donc porter sur la question de savoir pourquoi et comment Russell commence par intervenir dans ce champ, et ce que signifie cette bifurcation de son intérêt de la géométrie à la logique mathématique.

Certes, Russell affirme que ce fut en 1900, lors de sa rencontre avec les idées de Giuseppe Peano (1858-1932) au Congrès International de philosophie, que la logique symbolique se révéla à lui comme un instrument d'analyse permettant d'étendre la précision mathématique à des domaines où régnait la confusion du langage philosophique. Pourtant, Russell a fait des études de mathématiques au Trinity College de Cambridge. Or, ce même collège a précisément été le théâtre d'un courant de pensée spécifique, l'Ecole Algébrique Anglaise, qui, dans la première moitié du 19ème siècle, a élaboré une conception symbolique de l'algèbre, bien représentée dans le *Cambridge Mathematical Journal* créé en 1839, et dont les travaux de George Boole (1815-64) en logique constituent une des formes d'aboutissement. De plus, c'est avec Whitehead que Russell se rend à ce Congrès en 1900, et celui-ci vient de publier en 1898 *A Treatise of Universal Algebra* qui, s'inscrivant dans la lignée des algébristes anglais, mène une étude comparative des algèbres développées au 19ème siècle.

Parallèlement aux géométries non euclidiennes, les travaux de l'Ecole Algébrique Anglaise ont représenté une étape tout à fait essentielle dans l'élaboration de la distinction entre validité logique et vérité des mathématiques [Durand-Richard, 2000]. Dans la première moitié du 19ème siècle, ils s'inscrivent dans un vaste mouvement de réforme, tant de l'enseignement des mathématiques que des institutions universitaires, qui vise à intégrer, aussi bien dans l'enseignement que dans la recherche, l'inventivité des pratiques opératoires, la réalité de leur expérience, tout en fondant leur vérité non plus sur la signification des résultats, mais sur la logique symbolique de leurs transformations [Durand-Richard, 2001]. La question de la nature des mathématiques - science réaliste ou jeu formel - est ainsi posée comme cruciale en algèbre avant de l'être en géométrie. Il importe donc de comprendre ce qui s'est joué au 19ème siècle entre ces deux disciplines, et comment se situe le travail de Russell sur les axiomes de la géométrie par rapport à la problématique symbolique qui a conduit à la mathématisation de la logique par Boole. Il s'agit donc ici d'analyser l'inscription historique de la démarche de Russell dans le contexte anglais, essentiellement celui de la seconde moitié du 19ème siècle, plutôt que dans le cadre, déjà étudié, des débats avec Poincaré [Nabonnand, 2001]. Dans la mesure où cet *Essay* de Russell s'appuie sur une dissertation rédigée à l'occasion de son élection comme membre de Trinity College, son contenu ne saurait être estimé indépendamment du statut que se partagent alors l'algèbre et la géométrie dans l'enseignement à l'université de Cambridge, compte-tenu de l'impact des géométries non euclidiennes.

Après avoir spécifié les conditions dans lesquelles Russell a rédigé son *Essay*, je me propose donc d'analyser comment celui-ci s'inscrit dans les débats concernant la nature de la vérité – nécessaire ou contingente - en mathématiques, débats marqués à la fois par le retour en force de la géométrie classique dans l'enseignement à Cambridge au milieu du 19ème siècle, et par les interrogations sur la nature de l'espace issues de la production de géométries non euclidiennes.

•I• Les conditions de préparation de l'*Essay on the Foundations of Geometry*

Au cours de ses études à Cambridge, Russell est tout autant concerné par les mathématiques que par la philosophie. Il passe le *Mathematical Tripos* en 1893, avant de se tourner vers le *Moral Sciences Tripos.* D'après ce qu'il en écrit en 1948, Russell aurait été en contact avec les géométries non euclidiennes avant même ses études à Cambridge [Russell, 1948, 143]. Ses premières considérations sur le statut épistémologique de ces géométries se trouvent dans de courts écrits rédigés après son *Mathematical Tripos,* au cours de sa dernière année d'étudiant en 1893. Elles interrogent aussi bien la nature de cette "Métagéométrie" que celle de l'espace. Russell reste alors cependant dans un cadre métrique, ignorant la géométrie projective qu'il va découvrir dans des travaux continentaux en 1895 à Berlin, à travers la synthèse de Felix Klein (1849-1925) dans *Vorlesungen über Nicht-Euclideische Geometrie*. Russell rédige alors à Berlin un premier manuscrit, daté de mars 1895, et intitulé *Observations on Space and Geometry.* Il est aujourd'hui conservé dans les archives de Bertrand Russell à l'université Mc Master dans l'Ontario.

Le manuscrit de 1895, soumis en août pour la candidature de Russell au "fellowship" de Trinity College, est aujourd'hui perdu. Devenu membre de ce collège, Russell poursuit sa réflexion sur le sujet. En 1896, il se rend aux Etats-Unis, d'abord au Bryn Mawr College en Pensylvannie en novembre, puis à John Hopkins University à Baltimore en décembre, où il expose ses réflexions sur la géométrie.

Sa publication de 1897, *An Essay on the Axioms of Geometry,* porte aussi bien la marque de cette formation mathématique polymorphe, que des conceptions idéalistes de philosophes comme Francis H. Bradley (1846-1924), logicien d'Oxford, ou de son ami John M. E. MacTaggart, membre du groupe des "Apostles", dont Russell fait partie avec Whitehead. C'est donc à la fois en mathématicien et en philosophe que Russell reprend, à partir d'une analyse des implications des nouvelles géométries, la question de la nature de la connaissance mathématique, dans ses rapports avec la pensée humaine comme avec la réalité, puisque l'existence de plusieurs géométries conduit à réinterroger la nature de l'espace aussi bien que la façon dont il se trouve appréhendé : elles bousculent en effet l'ensemble des conceptions philosophiques en présence, de la perception empirique au conventionnalisme, en passant par la notion kantienne d'intuition *a priori* propre à l'espace et au temps.

Les débats autour des nouvelles géométries portent sur la nécessité de redéfinir les spécificités légitimes qui caractérisent le référent spatial. Et ce travail de redéfinition n'a pas qu'une portée intellectuelle. Il ne fait pas que transformer la conception que mathématiciens et philosophes se font de l'espace. Il bouleverse aussi le rôle que joue la géométrie dans le système des connaissances que veut pérenniser l'enseignement universitaire, en tant que lieu d'élaboration et de transmission du savoir et des représenations collectives auxquelles il participe. Russell, à peine sorti de Cambridge, est profondément marqué par les débats où s'expriment les enjeux d'une telle remise en cause. La portée de son travail ne saurait donc être appréciée sans un examen préalable de la situation de l'enseignement de la géométrie à Cambridge en cette fin du 19ème siècle.

•II• Le retour de la géométrie dans l'enseignement à Cambridge au milieu du siècle

Le fait qu'à Cambridge, en 1820, les jeunes mathématiciens de l'Ecole Algébrique Anglaise aient imposé la notation leibnizienne au Senate House Examination - examen constitutif du *Mathematical Tripos* - et mis des manuels d'exercices à la disposition des tuteurs des différents collèges de l'université, le fait aussi que George Peacock (1791-1858) y ait explicité une conception purement symbolique de l'algèbre, ne signifient pas que l'enseignement de l'algèbre y ait définitivement pris le pas sur celui de la géométrie dans le curriculum. Dans une université anglicane comme celle de Cambridge, qui reste avec Oxford un des piliers de la société anglaise, se référer au géométrique ou à l'algébrique comme fondement de la connaissance ne renvoie pas seulement à une question de modernité ou de conservatisme en mathématiques. Un tel choix de référence ré-interroge l'ensemble des fonctions symboliques du savoir, qui sont alors âprement discutées, face à la nécessité historique d'adapter ces universités aux nouvelles valeurs issues de la Révolution Industrielle [Durand-Richard, 1996]. Mais après la réforme électorale de 1832, avec l'installation de l'ère victorienne (1837-1901), le souci de re-stabiliser les institutions va l'emporter sur la volonté de renouvellement. A Cambridge, il s'accompagnera d'un tel retour à la tradition que l'historien des mathématiques Harvey Becher a pu parler de contre-révolution [Becher, 1980, 35]. Les dimensions du conflit entre conception algébrique ou géométrique du fondement des mathématiques ne recouvrent pas seulement des luttes de pouvoir et des difficultés conceptuelles ou pédagogiques. Elles atteignent la question de la nature et du rôle de la connaissance humaine. Et les affrontements croisés de toutes ces raisons complexifient considérablement les argumentaires, obscurcissant du même coup les enjeux des débats.

•1• *Raisons politiques*

En tant que tuteur à Trinity College de 1817 à 1836, Peacock a transmis sa conception de l'algèbre symbolique à toute une génération d'étudiants, dont Augustus De Morgan (1806-71) et Duncan F. Gregory (1813-44) sont les plus connus. Mais il va longtemps payer l'engagement réformateur de ses jeunes années en tant que mathématicien whig anglican : il ne sera proposé comme *Lowndean Professor of Geometry* qu'en 1836, avec le soutien de Lord John Russell, le grand-père de Bertrand, avant de quitter Cambridge en 1839 pour devenir *deacon* de la cathédrale d'Ely. Les étudiants qui formaient le groupe des *Analytics*, autour de Charles Babbage (1791-1871), John J.W. Herschel (1792-1871) et Peacock se sont dispersés depuis longtemps, quittant la vie provinciale de Cambridge pour des responsabilités politiques. Quant à Herschel et Babbage, l'un est devenu astronome, spécialiste de l'hémisphère sud depuis son séjour au Cap de Bonne Espérance (1833-38), tandis que l'autre délaisse son enseignement de *Lucasian Professor of Mathematics* à Cambridge pour vivre à Londres et se consacrer à la conception de ses machines, *The Difference Engine* et *The Analytical Engine* [Durand-Richard, 1992]. Au même moment, le philosophe et historien des sciences inductives William Whewell est nommé *Master de Trinity College* en 1841 par le Premier Ministre Tory Robert Peel, à la demande de la reine Victoria, précisément pour éviter l'élection d'un élément plus progressiste tel que Peacock [Whewell Papers, Add.Ms.a.58[88]]. Whewell, s'il a été proche des *Analytics* pendant ses études, n'a jamais totalement adhéré à la conception symbolique de l'algèbre. Depuis 1835, il milite ardemment contre le primat de l'algèbre symbolique dans l'enseignement et en faveur de l'enseignement premier de la géométrie [Whewell, 1835]. A partir de 1845, la volonté initiale de faire renoncer Cambridge à son statut de "seminary of sound learning and religious education" [Gascoigne, 1989, 1-23] pour lui faire adopter celui de "national and professionnal seminary"", telle qu'elle était portée par Peacock et les réformateurs, cède le pas devant la volonté de Whewell d'instituer les mathématiques comme fondement de l'éducation libérale [Whewell, 1845]. Pour ce faire, Whewell reprend la distinction entre structure permanente et réalité contingente, que Peacock avait institué aussi bien pour l'algèbre que pour les statuts de l'université [Peacock, 1841, 130], et la transpose au savoir en distinguant études permanentes et études progressives : il classe alors l'algèbre symbolique dans les études progressives, les estimant trop nouvelles, donc trop mouvantes, et de ce fait, plus aptes à passionner les chercheurs qu'à structurer la réflexion des étudiants. Whewell met au contraire l'accent sur la pérennité d'une géométrie fondée sur le savoir des Anciens – ici Euclide – et sur l'appréhension du réel qu'elle constitue. En 1848, la réforme des enseignements marque le retour en force de la géométrie comme fondement du curriculum à Cambridge, en tous cas pour les premières années.

Cette controverse s'inscrit dans un débat plus général, portant sur la nécessité d'une réforme des statuts des universités anglicanes, en vue de restaurer le pouvoir de l'université sur les collèges, et de laïciser la fonction universitaire en libérant enseignants et étudiants de leurs serments de fidélité à l'Eglise Anglicane. Ce retour en force de la géométrie comme fondement du curriculum va constituer en quelque sorte le prix à payer pour la diversification et la spécialisation des enseignements, chère au cœur des réformateurs. En 1848, le*Mathematical Tripos* se trouve scindé eu deux parties : un examen élémentaire obligatoire pour tous, et un examen spécialisé pour les *Mathematical Honors*, qui peut être choisi au même titre que le *Natural Sciences Tripos,* ou le *Moral Sciences Tripos,* créés au même moment, ainsi que le *Classical Tripos,* créé en 1824, mais réservé jusqu'alors aux titulaires du *Mathematical Tripos.* Les réformes des statuts de l'Université, qui ponctuent la seconde moitié du siècle, se caractérisent par une spécialisation croissante, jusqu'à la création d'un *General Board of Studies*, qui regroupera douze spécialités en 1882 [Tylliard, 1913, 204]. En dehors de cette spécialisation, la réforme si ardemment souhaitée par les algébristes de Cambridge n'a finalement pas réussi à faire reconnaître l'importance des pratiques arithmético-algébriques comme fondamentales, et comme facteur d'intégration symbolique des nouvelles pratiques sociales.

•2• Raisons conceptuelles et pédagogiques

La distinction qu'établit Peacock entre une algèbre symbolique universelle - qui fonde la seule validité des lois opératoires - et une algèbre arithmétique - dont la vérité est attachée à l'existence des résultats - ne vise pas seulement à fonder l'algèbre sur des bases indépendantes de la contingence des pratiques algorithmiques de l'arithmétique, tout en légitimant ces pratiques inventives par des critères mieux fondés et moins subjectifs que la référence à l'induction, la généralisation ou l'analogie. Elle tente aussi de résoudre les paradoxes apparus en analyse algébrique du fait de l'extension du champ opératoire au-délà du fini et du "réel" mathématique. Peacock s'oppose ainsi explicitement à la démarche d'Augustin L. Cauchy (1789-1857) qui cherche au contraire à préciser les conditions d'existence locale des expressions algébriques en s'appuyant sur les concepts de limite et de fonction. Peacock refuse radicalement ce retour à la multiplicité des cas comme une régression vers l'enfance de la science, et affirme sa propre démarche comme plus abstraite et plus universelle, au sens où l'entend John Locke (1632-1704) dans sa *Philosophy of Human Understanding* [Durand(-Richard), 1990]. Quoi qu'il en soit, il demeure difficile de départager ces deux types de légitimation, tant que la continuité elle-même n'est pas définie sans quelque référence à une intuition géométrique, ce qui ne sera le cas que dans la seconde moitié du 19ème siècle.

Cependant, les méthodes symboliques s'avèrent difficiles à assimiler pour des étudiants débutants. Elles ne se révèlent pas très efficaces dans les problèmes de physique mathématique qui, depuis le 18ème siècle, explicitent le programme newtonien d'une philosophie naturelle, atomiste et mécaniste, fondées sur les mathématiques. Elles ne permettent pas de résoudre les problèmes liés à l'existence effective de solutions, notamment dans la réésolution des équations différentielles, ou fonctionnelles. Parallèlement, le travail de Cauchy, qui propose une analyse algébrique fondée sur les concepts de limite et de fonction, se trouve plutôt écarté à Cambridge, autant en raison du rejet que lui manifestent d'abord les algébristes de Cambridge, que de la défiance des plus conservateurs à l'égard des méthodes analytiques en général [Becher, 1971, 262-326]. Whewell, pour qui "l'éducation appartient nécessairement au passé", déplore ainsi "l'effet destructeur de la seule analyse sur l'esprit", et stigmatise les innovations trop radicales qui cherchent à s'aligner sur les tendances du moment [Whewell, 1850, 3]. Il propose dès 1838 une doctrine des limites qui renoue avec la fidélité aux *Prinicipia* de Newton, et avec une présentation géométrique étayée par le recours à l'intuition, affirmant que "ce qui est vrai jusqu'à la limite est vrai à la limite" [Whewell, 1838, 155-61]. Un tel principe - bien que L'Huillier en ait établi le caractère erroné, confirmé par les travaux de Cauchy - sera repris dans certains manuels à Cambridge jusqu'après la mort de Whewell en 1866 [Becher,1971, 302]

Cette tension entre algèbre et géométrie à l'université de Cambridge ne correspond pas seulement à des luttes d'influence entre modernistes et conservateurs au sein de l'université. Elle manifeste une interrogation philosophique plus fondamentale quant au statut de la connaissance, et à la fonction des mathématiques dans la structuration de cette connaissance.

•3• Les mathématiques : sciences de l'esprit ou science de la nature ?

Le *Preliminary Discourse on the Study of Natural Philosophy*, que publie Herschel en 1830, est révélateur de la philosophie sous-jacente à la démarche des algébristes de Cambridge. Les mathématiques y apparaissent avant tout comme le langage de la raison. Elles constituent le paradigme même de la science abstraite, "indépendante de toute création et de tout système naturel, exception faite de la mémoire, de la pensée et du raisonnement" [Herschel, 1830, 18-22]. Les algébristes anglais, s'appuyant sur la philosophie de Locke, tirent les mathématiques du côté des sciences de l'esprit en affirmant que c'est cette seule puissance du rationnel qui permet d'articuler logiquement l'expérience empirique :

La connaissance est dans l'Entendement, qui est l'objet de cet ouvrage, et non dans la nature des choses qui existent hors de nous [Locke, 1755, II.8].

L'enjeu philosophique des débats relatifs au caractère fondationnel de l'algèbre ou de la géométrie est donc de savoir si les mathématiques correspondent à une activité de l'esprit, ou représentent une lecture des lois de la nature. La question n'est pas nouvelle, elle est constitutive de la science elle-même depuis que Galilée et Descartes l'ont affirmée comme expérimentale et comme activité du sujet. Elle renvoie à la question des fondements de l'objectivité de la science et des mathématiques, ainsi qu'à celle de l'élaboration du général à partir du particulier. Newton et Leibniz s'affrontaient déjà sur ce point, relativement à la nature de l'espace et du temps, entités réelles pour le premier, intellectuelles pour le second, constituant l'ordre de coexistence et de simultanéité des substances simples. Au 17ème siècle, sommés de trancher sur cette question, aussi bien les idéalistes que les empiristes ont finalement recours à des arguments théologiques. Car même si Locke refuse l'innéité des idées simples chères à Descartes, il n'exclut ni le caractère naturel des facultés de l'esprit, ni la finalité d'une connaissance qui doit conduire à celle de Dieu :

Dieu n'a pourtant pas négligé les Hommes, quoiqu'il n'ait pas imprimé dans leur âme ces idées et ces caractères originaux de connaissance : parce qu'il leur a donné d'ailleurs des facultés qui suffisent pour leur faire découvrir toutes les choses nécessaires à un Etre tel que l'Homme, par rapport à sa véritable destination [Locke, 1755, I.3.12]
"La principale de toutes nos pensées, et la véritable occupation de tout être doué d'entendement, c'est la connaissance et l'adoration de cet Etre Suprême (le Souverain Conducteur)". [Locke, 1755, II.7.6]

Mais aux yeux de la théologie naturelle, face à l'utilitarisme du début du 19ème siècle, en affirmant que "la Connaissance n'est autre chose que la perception de la liaison et de la convenance, ou de l'opposition et de la disconvenance qui se trouve entre deux de nos idées" [Locke, 1755, IV.1.1-2], la philosophie de Locke semble laisser le champ libre à une liberté de pensée et à un relativisme de la connaissance, perçus comme un danger par les tenants de la tradition. Whewell est particulièrement méfiant à l'égard d'une telle affirmation de la puissance du rationnel. Hostile à toute philosophie mécaniste, Whewell n'envisage la vérité que comme une certitude absolue. Les lois de la nature sont pour lui des lois divines [Whewell, 1833], la connaissance est réelle et s'appuie sur des idées fondamentales, qu'on peut connaître intuitivement, et qui prouvent l'existence de Dieu et l'immortalité de l'homme. Whewell intègre ainsi au corpus des vérités nécessaires des préoccupations d'ordre épistémologique, moral, social et métaphysique. C'est dire qu'il ne saurait fonder la connaissance mathématique sur des mécanismes opératoires portant sur des symboles arbitraires, dépourvus de signification, à la façon dont l'Algèbre Symbolique de Peacock, s'appuyant sur la conception lockéenne de la connaissance, tentait de fonder l'opérativité propre aux transformations d'une société en pleine mutation. Là où Peacock proclame l'arbitraire du signe, et le fonctionnement aveugle d'un calcul n'obéissant qu'à des lois universelles, Whewell réaffirme que chaque symbole doit être attaché à une signification, à une idée fondamentale, et que seule l'étude de ces idées fondamentales doit constituer le curriculum. Il refuse ainsi de considérer la mécanique comme une simple branche de l'analyse.

Tout comme William R. Hamilton (1805-65) a pu se référer à la philosophie de Kant pour étayer sa conception de l'algèbre comme science du temps pur [Hankins, 1980, 179], Whewell s'y réfère ouvertement à sa conception de l'espace, notamment dans son *History of Inductive Sciences* [Whewell, 1837, 3, 180-92]. La *Critique de la Raison Pure* réconcilie provisoirement idéalistes et empiristes en fournissant la représentation raisonnée, sans référence au divin, d'un lien nécessaire entre les perceptions et l'entendement, et elle confère objectivité aux concepts scientifiques en posant l'intuition pure de l'espace et du temps comme formes *a priori* de la sensibilité, conditions de possibilité de toute expérience sensible. Whewell s'appuie sur la philosophie de Kant pour fonder le caractère nécessaire de la géométrie sur cette intuition *a priori* de l'espace, qui permet d'abolir la distinction entre réalité objective et connaissance subjective.

Ces différents facteurs, institutionnels, pédagogiques et épistémologiques, vont contribuer à renforcer une conception descriptive des mathématiques à partir du milieu du siècle. Même les mathématiciens qui prolongent les travaux de l'Ecole Algébrique Anglaise seront happés par ce retour au géométrique. S'ils poursuivent l'exploration des propriétés strictement symboliques de l'algèbre, certains, parmi les plous productifs d'entre eux, renoncent à lui attribuer une quelconque dimension ontologique et ne s'y réfèrent que d'un point de vue strictement technique. Ainsi, De Morgan, dans ses quatre articles publiés de 1842 à 1849 "On the Foundation of Algebra", réinvestit la question de la signification des symboles en se référant à des états mentaux et à des processus, avant d'analyser la technicité du symbolisme opératoire de l'algèbre, qu'il appelle désormais "algèbre logique" [De Morgan, 1842]. Et lorsque Arthur Cayley (1821-95) poursuit le débat sur la nature de l'algèbre, s'il reconduit la séparation entre algèbre arithmétique et algèbre symbolique, il les rebaptise respectivement logistique et tactique, avant de préciser que l'algèbre tactique inclut les calculs qui relèvent de l'infini dénombrable [Cayley, 1864]. Parallèlement, la géométrie analytique, dont les calculs sont fondés sur la géométrie, ne manquera pas de profiter de tous les acquis techniques des plus récents développements de l'algèbre.

•III• L'introduction des géométries non euclidiennes en Angleterre

Dans la seconde moitié du 19ème siècle, la diffusion des géométries non euclidiennes en Angleterre va d'abord remettre en cause cet équilibre tout juste élaboré entre conceptions réaliste et formaliste des mathématiques. Ces nouvelles géométries ne se contentent pas de bousculer les propriétés de l'espace euclidien qui caractérisaient jusque là la référence à la réalité, et qui réconciliaient réalité objective et connaissance subjective. Elles le font à partir d'une démarche analytique, calculatoire, qui, en produisant d'autres caractérisations possibles d'un espace, en interroge à la fois la réalité et le caractère absolu. Elles réactivent donc les questions relatives au fait de déterminer si les mathématiques sont l'expression d'une réalité absolue plutôt que perçue, ou l'expression d'une construction de l'esprit, et dans ce cas, si elle repose sur l'expérience ou sur des idées innées. Ces questions, qui se posaient pour l'algèbre au début du siècle, vont se trouver transférées du côté de la géométrie. Le débat va donc systématiquement porter sur ce qu'il convient de considérer comme premier, comme fondamental : soit une certaine réalité, dont l'écriture analytique n'est que l'expression, soit la loi formelle, dont le réel n'est qu'une interprétation.

•1• Que dire au-delà de la dimension trois ?

Le retour en force de la géométrie dans le curriculum, et les difficultés propres aux développements d'une algébre et d'une analyse dont la distinction reste ténue à cette époque, n'ont cependant pas bloqué les recherches en ce domaine. L'Ecole Algébrique Anglaise a permis de renouer les contacts avec les mathématiques continentales, et a ouvert la voie aux recherches de toute une seconde génération d'algébristes, dont De Morgan, Gregory, Cayley ou James J. Sylvester (1814-97) ne sont que les plus connus, et qui se livrent notamment à une étude systématique des propriétés générales des opérations symboliques, baptisée "calcul des opérations" [Carmichaël, 1855].

Qu'ils soient analystes ou géomètres, aucun mathématicien ne peut cependant ignorer que le traitement analytique de la géométrie et de la mécanique débouche sur la considération de systèmes à plus de trois variables, qui peuvent être interprétés comme des espaces à plus de trois dimensions. Mais dans l'immédiat, cette interprétation n'engage aucune réalité, qu'elle soit physique ou conceptuelle : les résultats obtenus sont considérés comme de simples artifices techniques. Le langage de la géométrie est cependant appelé à la rescousse, sur un mode quasi métaphorique, afin d'en suggérer une représentation. Ainsi, George Salmon (1819-1904) en parle-t-il comme d'un jeu de langage [Salmon, 1866, 328], rendu possible par une simple analogie, procédé que Peacock s'était précisément appliqué à éliminer en affirmant le caracère universel et premier de l'algèbre symbolique :

I have already completely discussed this problem when we are given three equations in three variables ... The question now before us may be stated as the corresponding problem in space of p dimensions. But we consider it as a purely algebraical question, apart from any geometrical considerations.
We shall however retain a little of geometrical language, both because we can thus avoid circumcolutions, and also because we can thus more readily see how to apply to a system of p equations, processes analogous to those which we have employed in a system of three.

Dès les années 1840, Cayley étend ainsi le langage de la géométrie analytique au cas de n coordonnées, et sa conception des systèmes de nombres le conduit rapidement à l'étude des matrices [Cayley, 1847, 1855]. S'il envisage alors ces extensions à des géométries de dimension supérieure à trois comme un besoin de l'analyse, intellectuellement légitime, il en parle comme de représentations, c'est-à-dire d'un emprunt au discours géométrique, qui permet de les rendre plus intelligibles. Mais il ne les situe que dans le cadre d'une géométrie abstraite, au sens où il ne s'agit pas d'une réalité au même titre que la géométrie à trois dimensions [Cayley, 1869, 456].

The science [of Abstract Geometry] presents itself in two ways ; - as a <u>legitimate extension</u> of the ordinary two – and three-dimensional geometries ; and as a need in these geometries and in analysis generally. In fact whether we are concerned with quantitie<u>s</u> connected together in any manner, and which are, or are considered as variable or determinable, then the nature of the relation between the quantities is frequently rendered more intelligible by regarding them (if only two or three in number) as the co-ordinates of a point in a plane or in space : for more than three quantities there is, from the greater complexity of the case, the greater need of such a representation ; but this can only be obtained by means of the notion of a space of the proper dimensionality ; and to use such representation we require the geometry of such space.

En 1878, William Spottiswoode (1825-1883), alors qu'il présente le travail de Julius Plücker (1801-68) sur les coordonnées homogènes, dans son discours introductif devant la *British Association for the Advancement of Science,* va tenter de préciser cette notion de représentation. S'inspirant de l'arc-en-ciel, il la définit comme une méthode qui, bien que reposant sur une réalité tangible, bien qu'exprimant des lois naturelles, s'évanouit dès lors qu'elle a rempli son effet [Spottiswoode, 1878, 21].

This is in fact the whole story and mystery of manifold space. It is not seriously regarded as a reality in the same sense as ordinary space ; it is a mode of representation, or a method which, having served its purpose, vanishes from the scene. Like a rainbow, if we try to grasp it, it eludes our very touch ; but, like a rainbow, it arises out of real conditions of known and tangible quantities, and if rightly apprehended it is a true and valuable expression of natural laws, and serves a definite purpose in the science of which it forms a part.

Il est manifeste que l'émergence de ces nouvelles considérations analytiques entre en conflit avec la conception unitaire établie autour de la géométrie euclidienne au milieu du siècle, et que leur reconnaissance pleine et entière demande une transformation du champ conceptuel ainsi établi.

•2• Premières références explicites aux géométries non euclidiennes

C'est seulement dans les années 1860 que ces analystes font référence à l'article "Géométrie imaginaire" de Nikolai Lobatchevski (1792-1856), paru dans le *Journal de Crelle* en 1837, et qui fait intervenir, non seulement trois hypothèses possibles pour la somme des angles d'un triangle, mais aussi des angles, non plus réels, mais imaginaires. Ils sont cependant loin d'en tirer les mêmes conclusions que Lobatchevski, qui fonde la géométrie euclidienne sur l'expérience, et envisage la possibilité, d'une géométrie qui puisse exister analytiquement, sans exister dans la nature :

Après y avoir développé une nouvelle théorie des parallèles, j'ai tâché de prouver que rien n'autorise, si ce ne sont les observations directes, de supposer dans un triangle rectiligne la somme des angles égale à deux angles droits, et que la géométrie n'en peut pas moins exister, si non dans la nature, au moins dans l'analyse, lorsqu'on admet l'hypothèse de la somme des angles moindre que la demi-circonférence du cercle. [Lobatchevski, 1837, 295]

John Kelland (1809-78), mathématicien proche de l'Ecole Algébrique Anglaise, et professeur de mathématiques de l'université d'Edinburgh, ne rend compte de cet article qu'en 1863 dans les

Transactions of the Royal Society of Eidnburgh. L'impossibilité de démontrer que la somme des angles d'un triangle peut être inférieure à deux droits - l'hypothèse de l'angle aigu – ne le conduit à renoncer, ni au caractère absolu de la géométrie euclidienne, ni à son caractère *a priori*. Quant à Cayley, dans une courte note de 1865 sur le même sujet, il affirme ne pas comprendre que Lobatchevski puisse envisager que la géométrie euclidienne ne soit fondée que sur l'expérience, et préfère espérer que soit trouvée une "interprétation réelle" de sa géométrie.

•3• Accueil des géométries non euclidiennes en Angleterre dans les années 1870

Sur le Continent comme en Angleterre, c'est surtout à partir des années 1870 que les mathématiciens vont réagir activement aux géométries non euclidiennes, après la publication de la correspondance entre Carl F. Gauss (1777-1855) et H. C. Schumacher en 1865, la traduction en français du travail de Lobatchevski en 1866, et la publication la même année de la thèse d'habilitation (1854) de Bernhard Riemann (1826-66), qui change radicalement de point de vue en faisant dépendre la structuration de l'espace de la définition locale de différentes métriques possibles [Richards, 19, 73-74].

Le travail de Riemann se répand alors très vite chez les mathématiciens anglais, essentiellement grâce aux articles de diffusion qu'en donne le physiologue et philosophe Hermann Helmholtz (1821-94) dès les premiers numéros de *The Academy* et du nouveau journal de psychologie, *Mind*, et grâce à la traduction de son discours d'habilitation que William K. Clifford (1845-79) publie dans *Nature* en 1873, qu'il accompagne d'une série de conférences données à la *Royal Institution*, publiées dans le *Companion Review*.

Le nombre des publications de Helmholtz dans ces journaux anglais témoigne de l'impact polémique de son travail en Angleterre. Helmholtz va s'attacher à dégager l'apport épistémologique qu'implique ce point de vue métrique local, en examinant les conséquences que pourraient avoir sur les relations entre perception et conception le fait de vivre dans un espace à deux dimensions. Les nouvelles géométries fournissent un matériau mathématique à cette question, que l'écossais Thomas Reid avait déjà abordé philosophiquement au 18ème siècle. Elles font voler en éclats les caractéristiques unificatrices que Whewell envisageait comme consubstantielles à la vérité mathématique dont la géométrie euclidienne était censée constituer la seule véritable manifestation. L'événement a des conséquences d'autant plus bouleversantes qu'il coïncide avec la publication, alors tout aussi saisissante, de l'*Origine des Espèces* de Charles Darwin (1809-82), en 1859, qui engage une réévaluation radicale de la place de l'intellect dans les processus d'appréhension humaine du monde [Richards, 1988, 76-85].

Lorsqu'en 1871, le logicien et économiste William Stanley Jevons (1790-1864) répond à Helmholtz dans la revue *Nature*, elle aussi récemment créée, il situe clairement les enjeux du débat entre conceptualistes et empiristes, rangeant délibérément Helmholtz dans cette dernière catégorie. Formé à l'école de De Morgan à University College à Londres, il reprend à son compte son point de vue conceptualiste en mathématiques, aussi bien dans cet article contre Helmholtz qu'en logique contre Boole, où il maintient la nécessité de comprendre la signification attachée aux symboles à chaque étape d'un raisonnement. Il tente alors de soustraire la notion de vérité des enjeux du travail de Helmholtz en lui substituant celle d'applicabilité : Les *Eléments* d'Euclide ne seront ainsi ni plus vrais ni moins vrais dans un monde ou dans un autre, ils seront seulement plus ou moins applicables. Pour sa part, convoquant l'infiniment petit où s'identifient les relations géométriques des espaces euclidien et sphérique, c'est plutôt sur Archimède, Newton et Leibniz que Jevons s'appuie pour penser la vérité géométrique comme une vérité nécessaire ou transcendantale de type kantien, ontologiquement indépendante de son applicabilité, et renvoyant à une réalité plus fondamentale que celle qu'appréhende la seule expérience.

Le jeune Clifford, formé aux mathématiques à la fois à l'*University College* de Londres et au *Trinity College* de Cambridge, est professeur de mathématiques dans cette même université de Londres. Il a déjà rédigé plusieurs études sur les questions relatives à ces nouvelles géométries, et a déjà présenté un mémoire à la *Cambridge Philosophical Society*, analysant certaines implications des conceptions de Riemann sur la physique. Il mène de front l'élaboration d'une nouvelle algèbre géométrique et de multiples interventions en tant que polémiste du naturalisme scientifique, où il se situe du côté des empiristes [Richards, 1988, 109]. Sa théorie des biquaternions (1873-76) s'appuiera aussi bien sur les approches algébriques de Hamilton et de Hermann G. Grassmann (1809-77) que sur la synthèse de Klein des différentes géométries. Il développera le point de vue selon lequel l'algèbre et la géométrie ne sont que deux aspects d'une même méthode mathématique, et élaborera une théorie dynamique de l'espace, à la fois géométrique et physique, où la courbure dépend de la matière [Boï, 1997]. Dans ses conférences à la *Royal Institution,* il insiste sur le fait que l'analyse de Riemann spécifie – et isole - différentes propriétés de l'espace : la continuité, la courbure locale, la superposition et la similitude. La possibilité de les envisager séparément permet donc de concevoir d'autres modes de caractérisation de l'espace que celle de l'espace euclidien, dont bon nombre de mathématiciens anglais affirmaient jusque là qu'il était le seul concevable.

Les avancées mathématiques remarquables que représente le travail de Clifford ne signifie cependant pas que le débat soit clos. En témoignent les discussions dans *Mind* entre Helmholtz et le philosophe hollandais J. P. N. Land, quant au fait de savoir si une connaissance est possible au-delà de l'expérience des sens, ainsi que la réponse à Clifford du président de la *London Mathematical Society*, Samuel Roberts, qui, en 1882, refuse de considérer comme réelles ces exensions du langage géométrique [Richards, 1988, 113]. Dans la mesure où le travail de Riemann sur les multiplicités correspond à un point de vue local sur la géométrie, il reste toujours possible d'arguer que ces développements ne remettent pas en cause la conception globale d'un espace absolu ou d'une vérité transcendantale. Et ce d'autant plus qu'une alternative à la géométrie euclidienne s'offre alors, qui semble tout à fait adéquate pour continuer à soutenir ce point de vue : la géométrie projective de Cayley.

•IV• La géométrie projective de Cayley comme nouvelle géométrie synthétique

De 1854 à 1878, Cayley publie en effet dix mémoires sur les "Quantics", c'est-à-dire sur les "formes" algébriques, polynômes algébriques homogènes à 2 ou 3 variables. Le sixième, annoncé dès le premier mémoire, est présenté comme un "mémoire introductif à la partie géométrique du sujet", établi sur "des principes purement descriptifs" [Cayley, CMP 6, 592]. Il est essentiellement consacré mettre en relation la théorie des formes algébriques ternaires et la géométrie à deux dimensions. Non seulement Cayley y donne une présentation des résultats aanalytiques précédemment obtenus en termes géométriques, mais il montre que la géométrie métrique peut être conçue comme cas particulier de cette nouvelle géométrie, qu'il appelle non pas projective, mais "descriptive", en référence à celle de Gaspard Monge (1746-1818) [Cayley, 1883, 442].

•1• La géométrie descriptive de Cayley

Dans la mesure où la distance n'est pas conservée par projection en géométrie ordinaire, Cayley cherche à lui substituer une fonction qui possède les propriétés fondamentales de la distance en restant invariante par cette transformation. Ayant développé analytiquement la théorie de l'homographie dans le cadre de l'étude des formes binaires, où la dualité joue un rôle central, il définit le birapport $\frac{BA}{BD} : \frac{CA}{CD}$ pour 4 points colinéaires A, B, C, D, qui est invariant par transformation projective. La distance de deux points est alors définie comme cas particulier de ce birapport, et se trouve susceptible, de ce fait, d'englober plusieurs cas possibles, selon le choix fait pour les deux autres points. Dans l'espace projectif à 2 dimensions, où les coordonnées sont définies à un facteur multiplicatif près, Cayley se donne une conique qu'il appelle l'absolu. Toute droite du plan coupe cet absolu en 2 points x et y. Cayley montre que le birapport entre 2 points quelconques P et Q, et ces 2 points x et y possède les propriétés de la distance de deux points. Ainsi,, à toute forme quadratique :

$$q(x) = Ax_1^2 + Bx_2^2 + Cx_3^2 + 2Dx_1 x_2 + 2Ex_1 x_3 + 2Fx_2 x_3$$

qui vérifie : $q(kx) = k^2 q(x)$, on peut associer la forme bilinéaire symétrique :

$F(x,y) = 1/2 [q(x+y) - q(x) - q(y)]$

$$= Ax_1 y_1 + Bx_2 y_2 + Cx_3 y_3 + D(x_1 y_2 + x_2 y_1) + E(x_1 y_3 + x_3 y_1) + G(x_2 y_3 + x_3 y_2)$$

telle que $F(x,x)= q(x)$

$F(x,x) =0$ définissant la conique que Cayley nomme absolu, la distance entre 2 points est alors donnée par : $\cos^{-1} \dfrac{F(x,y)}{\sqrt{F(x,x).F(y,y)}}$

Et la dualité que Cayley a mise en évidence tout au long de cet article lui fournit de même la formule duale pour la mesure projective des angles, si on considère l'équation de la conique en coordonnées tangentielles.

Ces formules donnent celles de la géométrie euclidienne lorsque l'absolu est formé des 2 points cycliques (1,i,0) et (1,-i,0), qui sont les points d'intersection de $q(x) = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2$ avec la droite de l'infini $x_3 = 0$. Cayley peut ainsi affirmer que la géométrie plane ordinaire apparait comme une partie de cette géométrie descriptive [Cayley, 1859, 590-91]. Il le montre également pour la géomérie sphérique, et conclut en affirmant que cette nouvelle géométrie descriptive est "toute la géométrie".

Mais Cayley n'établit pas de lien avec les géométries non euclidiennes : sa note sur la Géométrie Imaginaire de Lobatschevski date d'ailleurs de 1865. Il lui apparaît cependant que les différentes métriques possibles dépendent du choix de l'absolu, et qu'elles ont toutes lieu dans le cadre unique d'une seule géométrie, celui de la géométrie projective.

•2• La synthèse géométrique de Cayley-Klein et son accueil en Angleterre

Dans plusieurs articles intitulés "Über die sogenannte nicht-euklidische Geometrie", et publiés, en 1871 ds *Nachrichten von der Königlichen Gesezlkschaft der Wissenschaften zu Göttingen*, et en 1873 ds *Mathematische Annalen*, Klein, s'appuyant sur cette remarque de Cayley et sur les travaux de K. G. Christian Von Staudt (1798-1867), conçoit la possibilité d'intégrer les géométries non euclidiennes dans la géométrie projective [Richards, 1988, 144-46]. Il élabore ainsi des modèles projectifs, ainsi qu'un vocabulaire adapté, pour la géométrie hyperbolique de Lobatchevski-Bolyai, et pour les géométries elliptique et euclidienne. Klein démontre ainsi que, dans le plan, le choix d'un conique réelle conduit à la géométrie de Gauss-Bolyai-Lobatchevski, et celui d'une conique imaginaire à la géométrie elliptique de Riemann. Il appelle donc hyperbolique la géométrie de Lobatchevski parce que chaque droite y coupe la conique absolue en 2 points réels; tout comme l'hyperbole coupe la droite à l'infini en 2 points. Il appelle elliptique la géométrie de Riemann à cause de l'analogie entre l'ellipse ordinaire, qui a une intersection vide avec la droite à l'infini, et les droites de la géométrie riemannienne qui n'ont pas de points réels communs avec la conique absolue. Enfin, il appelle parabolique la géométrie euclidienne parce que ses droites coupent la conique fondamentale en un seul pt réel.

Avec le travail de Klein, l'affirmation de Cayley : "La géométrie descriptive est toute la géométrie" acquiert une telle pertinence que son premier biographe, Andrew R. Forsyth (1858-1942), parle de leurs travaux comme d'un tout organique [Forsyth, 1895, xxxvi]. La lecture projective des différentes géométries, ainsi que les relations qu'établit Klein dans son programme d'Erlangen entre géométries et groupes de transformation, sont accueillies avec enthousiasme en Angleterre. S'il n'est pas alors traduit en anglais, les auteurs s'y réfèrent abondamment. Et Klein participe au congrès de la *British Association for the Advancement of Science* en 1873, où il peut discuter directement ses idées avec les principaux mathématiciens britanniques.

Cet intérêt pour la géométrie projective en Angleterre est cohérent avec le cadre institutionnel et épistémologique des mathématiques établi à Cambridge depuis le milieu du siècle. Là où les géométries non euclidiennes semblent multiplier les conceptions possibles de l'espace, là où Riemann en propose une approche locale, l'approche projective, telle qu'elle se trouve synthétisée par Klein, offre une réunification du domaine qui semble plus conforme au statut de vérité nécessaire que Cambridge avait conféré plutôt à la géométrie qu'à l'algèbre depuis le milieu du siècle.

•3• L'ontologie kantienne des conceptions de Cayley

En 1883, Cayley préside à Southport le congrès de la *British Association for the Advancement of Science*. Les discours inauguraux de cette société savante sont traditionnellement l'occasion de dresser le bilan des recherches dans les différentes disciplines, et d'en dégager la philosophie. C'est dans ce cadre que Peacock avait dégagé les fondements philosophiques de sa conception symbolique de l'algèbre. Le discours présidentiel de Cayley n'échappe pas à la règle : sa présentation de ce qu'il appelle les "mathématiques modernes", ou "l'analyse et la géométrie modernes", cherche à en préciser l'épistémologie sous-jacente. Premier *Sadlerian Professor of Pure Mathematics* à Cambridge depuis 1863, Cayley est tout à la fois considéré comme créateur de l'algèbre moderne en raison de ses travaux fondateurs en théorie des invariants, en théorie des matrices, et en théorie des groupes, et comme créateur des géométries de dimension quelconque, ayant de surcroit révolutionné la conception des géométries non euclidiennes. Mais alors que ses multiples contributions ne cessent ainsi d'élargir le champ des recherches algébriques, son discours présidentiel marque au contraire son souci de s'inscrire dans le prolongement de la philosopie des sciences structurée par Whewell au milieu du siècle, et dont il se réclame explicitement [Cayley, 1883, 432]. Ce n'est pas là simple présentation tactique. Sa volonté de se démarquer de toute philosophie empiriste est clairement affirmée, aussi bien vis-à-vis des géomètres non-euclidiens, de Lobatchsvski à Riemann, que vis-à-vis de John Stuart Mill, auquel il oppose les "vérités de la géométrie", qui ne sont autres que les propriétés de nos "conceptions", "objets purement imaginaires", au sens kantien du terme, les seuls à donner un sens aux vérités universelles et nécessaires des mathématiques. C'est au nom du caractère premier de l'intellect que Cayley récuse toute intervention de l'expérience dans ce qui constitue les fondements de la connaissance, convoquant tout à la fois Platon, Leibniz et Kant pour étayer ce point de vue :

Kant's view is that while there is no doubt but that all our cognition begins with experience, we are nevertheless in possession of cognitions a priori, independant, not of this or that experience, but absolutely so of all experience, and in particular that the axioms of mathematics furnish an example of such cognitions a priori. ...

Kant holds further that space is no empirical conception which has been derived from external experiences, but that in order that sensations may be referred to something external, the representation of space must already lie at the foundation : and that the external experience is itself first only possible by the representation of space. And in like manner time is no empirical conception which can be deduced from an experience, but it is a necessary representation lying at the foundation of all intuitions. [Cayley, 1883, 431]

C'est ce recours à la géométrie comme entité imaginaire, c'est-à-dire conceptuelle au sens de Kant, qui lui permet d'y intégrer y compris les imaginaires de l'analyse, ceux dont il a précisément besoin pour penser les géométries non euclidiennes.

Qui plus est, seule la géométrie constitue pour lui ce socle conceptuel, fondement de toute connaissance. Il désavoue le recours de Hamilton à l'intuition du temps pur pour fonder les quaternions en algèbre. Toute intervention du temps lui parait encore trop proche de l'expérience, il en réserve l'intervention au domaine du calcul différentiel. et préfère s'appuyer sur la notion de classement et d'ordre, faisant dériver la notion de nombre cardinal de celle de nombre ordinal [Cayley, 1883, 443].

La conclusion du discours inaugural de Cayley manifeste cependant l'intérêt particulier qu'il accorde aux sciences de l'esprit, tout en marquant leur subordination à cette conception réaliste du monde. Cayley y accorde un statut spécifique aux récents développements de l'algèbre symbolique, qu'il situe "hors des mathématiques ordinaires", "hors de l'algèbre ordinaire", lui attribuant un statut de méthode analytique générale. Il accorde surtout ce statut privilégié à l'ouvrage de Benjamin Peirce (1809-80) de 1870, *Linear Associative Algebra,* republié par son fils Charles S. Peirce (1839-1914) en 1881 avec des notes supplémentaires dans *American Journal of Mathematics.* Cayley ne cherche absolument pas à fonder cette méthode : c'est elle au contraire qui lui permet de traiter de l'addition ou de la multiplication des lignes, des aires, des rotations, des forces, etc., sans avoir à les "concevoir". Il définit l'algèbre multiple de Perice comme "théorie générale", et envisage alors toutes les autres comme des mises en œuvre de cette théorie générale, aussi bien les théories d'Argand et Peacock sur les imaginaires, celle de Hamilton et Clifford sur les quaternions et les biquaternions, ou celle de Grassman et son extension par Cox sur les géométries non euclidiennes, toutes qualifiées de géométriques, que les théories de Boole sur les lois de la pensée, ou de

Schubert sur la *Abzählende Geometrie* (1878), qu'il estime plus proche de la logique. Cayley définit donc ce qu'il entend par "théorie générale" de la façon suivante, qui n'est autre que ce qui est aujourd'hui défini comme isomorphisme de corps et d'espaces vectoriels :

Consider any such entity as determined by the proper number of parameters a, b, c (for instance, in the case of a finite line given in magnitude and position, these might be the length, the coordinates of one end, and the direction-cosines of the line considered as drawn from this end), and represent it by or connect it with a given set of units i, j, k, &c. Conversely, any such linear function represents an entity of the kind in question. Two given entities are represented by two linear functions ; the sum of these is a like linear function representing an entity of the same kind, which may be regarded as the sum of the two entities ; and the product of them (taken in a determined order, when the order is material) is an entity of the same kind, which may be regarded as the product (in the same order) of the two entites. The value of the theory in regard to any kind of entity would of course depend on the choice of a system of units i, j, k, ..., with such laws of combination as would give a geometrical or kinematical or mechanical significance to the notions of the sum and product as thus defined.[Cayley, 1883, 4581883, 458]

Mais la détermination des conditions qui permettent de définir les espaces considérés comme des espaces vectoriels ou des corps n'est pas ici posée, dans la mesure où pour Cayley, l'ensemble de ces considérations mathématiques portent sur l'analyse d'un espace global pré-déterminé, qui est devenu celui de la géométrie projective.

Ce sont précisément ces théories, et leur mise en correspondance avec le réel, que Cayley qualifie de mathématiques modernes, devenues "mathématiques pures" à Cambridge en remplacement de l'algèbre, depuis la restructuration du poste de "Sadlerian professor" en 1860. Bien plus que dans sa référence de circonstance à Platon, donnée comme gage de l'enracinement de la science dans le respect des Anciens [Garland, 1980, 28-52], il semble donc que cette "pureté" des mathématiques revendiquée par Cayley repose à la fois sur la conception kantienne d'une intuition pure de l'espace, considéré comme condition *a priori* de toute expérience, et sur les plus récents acquis d'une algèbre dont le caractère opératoire, attribué à la méthodologie des mathématiques, est implicitement rapporté à l'esprit.

•V• L'intervention du jeune Russell dans ce champ

Entre 1893 et 1897, le jeune étudiant qu'est Russell va prendre connaissance des interrogations philosophiques que suscitent les nouvelles géométries, aussi bien vis-à-vis du statut de la vérité en mathématiques que du point de vue des fondements de la connaissance. Celui-ci s'était stabilisé dans l'enseignement à Cambridge autour d'une conception néo-kantienne des mathématiques, offrant une appréhension réaliste du monde plus compatible avec la théologie naturelle que le symbolisme aveugle des calculs analytiques. Intégrant progressivement tous les développements géométriques et leurs implications philosophiques, Russell va tenter d'expliciter une base axiomatique qui permette d'articuler en des termes nouveaux la compatibilité entre une intuition *a priori* de l'espace et cette nouvelle géométrie projective. Bien qu'elle ne réponde plus aux mêmes critères intuitifs que la géométrie euclidienne, la géométrie projective s'offre en effet comme nouvelle conception synthétique possible de la géométrie. Il s'agira donc de déterminer à quels critères intuitifs elle est susceptible de répondre.

•1• Premières interrogations de Russell idéaliste

Les premières réflexions de Russell sur la géométrie se trouvent dans ses notes relatives au cours de métaphysique de W. G. Ward, alors qu'il prépare le *Moral Sciences Tripos.* Théologien catholique, Ward propose une approche idéaliste, plus philosophique que scientifique, au problème des rapports entre réalité et vérité, contingence et nécessité, expérience et conception [Russell, 1983, I 124]. Il insiste sur la vérité nécessaire des énoncés géométriques, une nécessité à laquelle Dieu lui-même, malgré son omnipotence, ne pourrait se soustraire.

Au cours de ces années d'études, Russell est plus particulièrement sensible aux arguments idéalistes de Bradley et de son ami MacTaggart, à qui son *Essay* de 1897 est d'ailleurs dédié. Ces philosophes récusent le caractère formel du raisonnement humain, qu'ils estiment ne pas pouvoir être réduit à un simple jeu sur des symboles dépourvus de signification, ni fondé sur des conventions arbitraires.

Dans ces notes, reprenant la distinction établie par Helmholtz entre la géométrie fondée sur l'intuition transcendantale et la géométrie fondée sur l'expérience, Russell se propose d'interroger les relations entre signification et représentation mentale des géométries non euclidiennes, qualifiées toutes ensmble de "Métagéométrie". Il n'est pas convaincu par le mode de légitimation de l'argumentaire de Helmholtz, qui, pour établir l'origine empiriste des conceptions, avait utilisé une analogie avec des poissons plats vivant à la surface d'une sphère, affirmant de même l'impossibilité, pour des êtres vivant dans un espace à trois dimensions, de concevoir un espace à quatre dimensions. Cependant, pour Russell, si les démonstrations analytiques permettent d'établir la consistance de tels espaces, elles ne permettent pas de les imaginer, c'est-à-dire de les concevoir : un argument déjà souvent avancé, par exemple par Salmon contre Sylvester [Richards, 1988, 56]. Lorsqu'il estime que le raisonnement formel ne suffit pas à saisir l'espace tel qu'il est conçu, Russell s'appuie aussi bien sur la pensée idéaliste que sur le courant conceptualiste en mathématiques, qui fait préférer un recours aux intuitions spatiales plutôt qu'à l'algèbre comme fondement de la connaissance :

I do not see how we can avoid the conclusion, that geometry, to be geometry, ... must depend ultimately on space-intuitions ... Further that such space intuitions are for us necessarily Euclidean ; and that therefore the speculations of meta-geometry have no epistemological importance [Russell, 1983, I, 127].

Ainsi pour le jeune Russell, la connaissance strictement déductive ou formelle, n' apparaît pas suffisante pour saisir le réel. La méta-géométrie est ainsi saisie comme construction artificielle, qui ne saurait à elle seule satisfaire aux exigences d'une conception descriptive de la connaissance. Force est donc, pour soutenir une telle conception, d'avoir recours à des arguments idéalistes concernant le caractère descriptif et absolu de la géométrie, arguments qui sont conformes à l'état d'esprit général de l'enseignement de la géométrie et de l'algèbre à Cambridge. Dans ces premières remarques, le caractère transcendantal de la géométrie euclidienne n'est donc pas remis en cause par l'existence analytique d'autres géométries.

•2• Comment Russell accueille-t-il la géométrie projective ?

Russell ayant renoncé à passer la deuxième partie du *Mathematical Tripos* pour s'orienter vers le *Moral Sciences Tripos*, c'est à Berlin qu'il va découvrir la géométrie projective, notamment grâce aux *Vorlesungen über Nicht-Euclideische Geometrie* de Klein, qu'il considère comme un des meilleurs ouvrages qu'il ait abordés. La lecture qu'a faite Joan Richards aux Etats-Unis du manuscrit de ses "Observations on Space and Geometry’, rédigées à Berlin, permet d'examiner comment Russell tente d'intégrer ces nouvelles géométries à son point de vue conceptualiste sur la géométrie.

Il est manifeste qu'en dépit de l'appréciation positive qu'il porte à ce travail synthétique, Russell ne renonce en rien à sa conception kantienne d'une intuition *a priori* de l'espace. Il la soutient d'abord en s'appuyant sur les travaux de deux métaphysiciens allemands, Heinrich Lotz et Franz Erhardt, avec lesquels il réaffirme contre Helmholtz et ses successeurs que l'espace décrit par la géométrie euclidienne est un concept *a priori* dont le statut épistémologique essentiel n'est pas affecté par les développements des géométries non euclidiennes. Leur intégration en tant que géométries, et non en tant qu'élaborations analytiques, supposerait que soit clarifé le statut de la connaissance géométrique de l'espace, ce que veut établir Russell en séparant la part objective et la part subjective, psychologique, qui interviennent dans la conceptualisation de l'espace. Pour ce qui concerne la part objective, la seule qui le concerne vraiment, Russell persiste à subordonner l'analyse logique à l'intuition spatiale :

Hence, meta-geometry and the a priority of space are not obviously incompatible – and neither can, without further investigations, be regarded as an argument against the other ...
Even if sensational space were subjective, it would not afford sufficient ground for an objection to Metageometry, and vice-versa ...
Geometrical Axioms owe their origin in part only to spatial intuition, the remainder being due to purely logical motives ...[Russell, 1895, cité par Richards, 1988, 210]

C'est dire que pour Russell, la validité logique ne saurait suffire à assurer la légitimité d'une quelconque géométrie. De ce fait, quelle que soit l'importance de l'unification réalisée par la géométrie projective, dans la mesure où elle reste ici pour Russell de nature analytique, celui-ci persiste à la considérer comme une avancée technique, qu'il situe comme aboutissement des difficultés soulevées par les travaux précédents. Russell la présente donc en reprenant l'historique du développement des géométries non euclidiennes au 19ème siècle. S'il admet que Riemann a magistralement réduit les axiomes de l'espace à leurs racines analytiques les plus élémentaires, il déplore qu'il ait malheureusement omis d'établir ce qui reste pour Russell le problème philosophique essentiel : celui de l'adéquation entre conception et perception spatiales, sans laquelle la vérité géométrique n'est pas établie en tant que telle :

Mathematically, Riemann's form is probably as good as any that can be imagined ; but philosophically it seems to me very ill fitted to settle what space we require to fit our space-perceptions ; and this is the question on which turns the truth to fact of any Geometry, as opposed to mere logical self-consistency [Russell, 1895, cité par Richards, 1988, 212]

Quant à l'approche physiologiste de Helmholtz, Russell considère qu'elle permet seulement de décrire ces espaces hypothétiques, sans aucunement permettre de les imaginer réellement. Au terme de ce panorama, aucune de ces deux approches ne semble pertinente pour appréhender le concept d'espace, que Russell persiste à concevoir comme transcendantal.

Ceci fait, Russell caractérise le passage des considérations métriques de Riemann et Helmholtz à la géométrie projective de Cayley et Klein, comme un simple changement de méthode. En réduisant toutes les notions métriques à des notions projectives, et en se fondant, non plus sur les caractéristiques d'un élément infinitésimal, mais sur les formules de transformation permettant d'exprimer tout mouvement donné, Russell estime que la géométrie projective offre une simplicité et une unité méthodologique qui apparaissent comme un progrès dans la structuration de la connaissance mathématique. Russell maintient cependant qu'elle est philosophiquement dépourvue de signification.

C'est ce dont émoigne notamment sa réponse aux arguments de l'astronome irlandais Robert S. Ball, qui, partant d'une conception différente de la vérité mathématique, avait développé, dans les *Transactions of the Royal Irish Academy,* un point de vue formel sur la géométrie projective. Dans cet article, Ball tentait d'échapper à l'apparente circularité de l'argument de Cayley, qui semblait définir la distance comme cas particulier du birapport de quatre points, alors que la donnée de leurs coordonnées présupposait une référence à la notion de distance. Pour ce faire, Ball élaborait d'abord une structure mathématique formelle, indépendamment du langage spatial, définissant des mots nouveaux et déduisant des théorèmes auxquels il cherchait *a posteriori* à donner une signification en les confrontant au langage spatial.

Russell ne suit pas Ball sur cette voie formelle. Il reconnaît que ce mode de théorisation a permis à Ball de clarifier les difficultés logiques du travail de Cayley, mais il ne lui reconnaît aucune portée philosophique. Russell reste attaché à un point de vue descriptif où l'objet mathématique et sa signification sont essentiellement inséparables : il ne peut concevoir que l'espace soit défini analytiquement, sans référent spatial spécifique [Richards, 1988, 218].

•3• *Russell et les fondements épistémologiques de la géométrie projective*

Lorsque Russell publie son *Essay on the Axioms of Geometry* en 1897, son point de vue est bien différent. Il ne considère plus la géométrie projective comme une simple avancée technique, mais comme représentative d'un nouveau concept d'espace, adéquat à la conception kantienne d'espace *a priori*, et donc à ses propres aspirations idéalistes où la connaissance autorise une appréhension du réel qui fasse sens au-delà du seul raisonnement formel ou de l'abstraction à partir de la seule expérience.

Ainsi, Russell introduit son *Essay* en se situant délibérément dans le sillage de Kant, le "créateur de l'épistémologie moderne", dont la philosophie a permis, au-delà des seuls arguments logiques, de dépasser la "guerre" entre empiristes et idéalistes au sujet de l'absolue certitude des vérités géométriques. Il estime cependant que Kant, bien qu'il ait donné sa "forme moderne" au débat sur la géométrie en envisageant les jugements géométriques comme fondés sur une intuition *a priori* de l'espace, tend à confondre *a priori* et subjectif. Prenant quelque recul par rapport à Kant, Russell affirme vouloir délaisser la question du subjectif, relatif aux états mentaux, pour en réserver l'étude à la psychologie, qui s’est précisément constituée au 19ème siècle. Il s'intéresse exclusivement à la question épistémologique de la connaissance *a priori*, qui comprend les postulats et tout ce qui peut en être déduit. Elle constitue l'élément apodictique ou nécessaire de la connaissance, et a besoin d'être hypothétiquement fondée au-delà du seul jeu formel : c'est elle qui fixe les conditions de l'expérience possible de toute forme d'extériorité. Russell la distingue de "l'élément matériel ou empirique", élément contingent qui dépend de l'expérience, et qui "pourrait être différent sans rendre la connaissance impossible" [Russell, 1897, 3].

Comme dans ses "Observations", Russell donne une présentation historique des nouvelles géométries, et la distingue de cette genèse – individuelle et subjective - des connaissances qu'il a exclue d'emblée de son champ d'investigation. Au-delà de l'érudition qu'elle représente dans un travail rédigé pour obtenir un *fellowship* de six ans, l'historicisation des contenus géométriques en une périodisation empruntée à Klein - celle des géométries synthétique, métrique et projective - relève d'une analyse critique des différents systèmes géométriques, qui souligne leur insuffisance à établir les fondements de la nécessité, et débouche sur une théorie constructive des axiomes *a priori* de géométrie projective.

Russell relève ainsi [§ 15] que l'objet de la géométrie hyperbolique n'est pas d'établir sa vérité, mais seulement l'indépendance logique de l'axiome des parallèles. Il souligne de même que si les travaux de Riemann et Helmholtz traitent de l'espace algébriquement et cherchent à établir la nature empirique des axiomes admis, ils permettent finalement d'affirmer *a priori* certains axiomes, puisque leur définition de l'élément infinitésimal de grandeur, aussi bien que celle de la courbure, supposent de conserver trois axiomes fondamentaux chez Riemann : celui de la libre mobilité, celui du nombre entier fini de dimensions, et celui de la distance [§ 23] ; la notion de congruence, que Helmholtz affirme établie par l'expérience, suppose l'existence des solides et l'homogénéité de l'espace [§ 24-27]. Mais surtout, leur intérêt exclusif pour l'aspect algébrique, s'il clarifie l'aspect quantitatif des grandeurs spatiales, les rend aveugles et sourds à leur nature et à toute considération qualitative sur l'espace [§ 16]. Pour Russell, l'expression analytique ne suffit pas, les axiomes géométriques sont philosophiquement indispensables.

Dans ce tableau historique, la géométrie projective de Cayley et Klein marque cette fois pour Russell un changement radical des idées fondamentales concernant la géométrie. Elle devient une géométrie qualitative, où les notions de mesure ou de quantité ont perdu toute pertinence. Russell déplore toutefois que cette géométrie n'ait trouvé pour l'exposer que des mathématiciens "techniques", c'est-à-dire des algébristes - au sens où l'algèbre a été réduite à une technique - à ne pas confondre avec des "mathématiciens de profession", comme le traduit à tort Cadenat en 1901.

The third [projective] period differs radically, alike in its methods and aims, and in the underlying philosophical ideas, from the period which it replaced. Whereas everything, in the second [metric] period, turned on measuremùent, with its apparatus of Congruence, Free Mobility, Rigid Bodies, and the rest, these vanish completely in the third period, which, swinging to the opposite extreme, regards quantity as a perfectly irrelevant category in Geometry ... The ideas of this period, unfortunately, have found no exponent so philosophical as Riemann or Helmholtz, but have been set forth only by technical mathematicians [§ 30]

L'importance philosophique de la géométrie projective provient du fait qu'elle permet de traiter les propriétés qualitatives communes de la géométrie euclidienne et de la Métagéométrie, ce qui permet d'établir qu'il n'y a pas de contradiction dans les systèmes non euclidiens puisque, dans le cas contraire, il y en aurait aussi dans la géométrie euclidienne. Pour Russell, la théorie de la géométrie projective, dont il reprend l'exposé détaillé à partir du mémoire de Cayley de 1859, repose bien, philosophiquement, sur cet immense changement des idées fondamentales. Mais ce changement est passé inaperçu jusqu'ici d'une part, en raison de la focalisation des auteurs sur la réunification des géométries engendrée par la méthode analytique, et d'autre part, plus essentiellement peut-être dans le débat sur la nature du calcul algébrique, en raison d'une interprétation erronée des formes projectives, considérées comme un simple changement dans la définition de la distance. Une telle interprétation, qui conserve à la géométrie euclidienne tous ses critères de réalité pour rejeter les autres dans l'imaginaire, est d'autant plus pernicieuse aux yeux de Russell qu'elle rend la géométrie projective très vulnérable à l'argument conventionnaliste de Poincaré :

Since these systems are all obtained from a Euclidean plane, by a mere alteration in the definition of distance, Cayley and Klein tend to regard the whole question as one, not of the nature of space, but of the definition of distance. Since this definition, on their view, is perfectly arbitrary, the philosophical problem vanishes – Euclidean space *is left in an indisputed possession, and the only problem remaining is one of convention and mathematical convention. This view has been forcibly expressed by Poincaré...* [§ 33]

Cette vulnérabilité est d'autant plus forte que la circularité des arguments de Cayley définissant la distance, tout comme le recours aux imaginaires, jettent le trouble sur la signification des termes employés, et sur la nature de leur rapport au réel. Russell va donc examiner successivement ces deux points afin de bien marquer la necessité de distinguer les axiomes de la géométrie projective de ceux de la géométrie métrique.

Comme Ball en 1887, et comme Cayley dans sa note de 1889, rédigée à l'occasion de la publication de son mémoire de 1859 dans ses *Collected Mathematical Papers*, Russell prend en compte l'objection à la définition de la distance. Il montre comment il est possible d'y échapper en s'appuyant, comme Klein, sur la construction du quadrilatère de Von Staudt, qui permet de définir le rapport anahrmonique et les coordonnées projectives indépendamment de toute considération métrique, uniquement par des propriétés descriptives. C'est là une étape essentielle de la distinction qu'établit Russell entre la géométrie projective, qualitative, et la géométrie métrique, quantitative, relevant chacune d'un système d'axiomes différents, à ceci près que les relations quantitaives présupposent des relations qualitatives. Ces précisions données, il est clair que la géométrie projective, qui est qualitative, ne peut suffire à définir la distance, qui est une propriété quantitative. C'est pourquoi Russell suggère de distinguer par deux noms différents la distance métrique traditionnelle de celle qui a été définie à partir du birapport de quatre points, en choisissant deux points particuliers selon les différentes géométries. Cette distinction établie, sans laquelle les relations qui paraissent métriques ne sont que des relations algébriques, donc des "symboles conventionnels pour des relations spatiales purement qualitatives", permettra d'écarter les soupçons de conventionnalisme qui pèsent sur les nouvelles géométries.

Distance in the ordinary sense is ... that quantitative relation, between two points on a line, by which their difference from other points can be defined. The projective definition, however, being unable to distinguish a collection of less that four points from any other on the same straight line, makes distance depend on two other points besides those whose relation it defines. No name remains, therefore, for distance in the ordinary sense, and many projective Geometers, having abolished the name, believe the thing to be abolished also, and are inclined to deny that two points have a unique relation at all. This confusion, in projective Geometry, shows the importance of a name, and should make us chary of allowing new meanings to obscure one of the fundamental properties of space. [§ 36]

Quant au recours de Cayley à l'imaginaire, Russell ne fait pas référence à ses considérations sur l'espace projectif comme un espace imaginaire, conceptuel, contenant le réel. Il ne retient que l'intervention des grandeurs imaginaires en géométrie, dont il cherche à restreindre l'emploi comme simples intermédiaires de calcul. Russell affirme en effet que tous les emplois fructueux des imaginaires en Géométrie sont ceux qui commencent et finissent par des grandeurs réelles et ne font usage des imaginaires que pour les étapes intérmédiaires. Dans tous ces cas, le raisonnement commence et finit par des considérations spatiales, et c'est là seulement que l'interprétation spatiale importe. Dans les chaînons intermédiaires, on traite d'une manière purement algébrique des grandeurs purement algébriques, et l'on peut effectuer toutes les opérations qui sont algébriquement permises. C'est seulement si les grandeurs auxquelles on aboutit sont susceptibles d'interprétation spatiale que le résultat peut être regardé comme géométrique [§ 43]. Russell reprend ici la remarque quelle peu scandalisée de Berkeley selon laquelle le mathématicien s'autorise des absurdités interdites au métaphysicien :

Every one can see that a circle, being a closed curve, cannot get to infinity. The metaphysician, who should invent anything so preposterous as the circular points, would be hooted from the field. But the mathematician may steal the horse with impunity [§ 43].

En conclusion de ce chapitre destiné à présenter les réflexions philosophiques qui expliquent la nécessité logique de distinguer entre les axiomes de la géométrie projective, qualitative, et la géométrie métrique, quantitative, Russell affirme tout à la fois que c'est seulement la connaissance de l'espace, et non celle de l'algèbre, qui peut nous assurer que tout ensemble de grandeurs donné a un corrélatif spatial, et que la géométrie métrique, quoiqu'historiquement antérieure à la géométrie projective, lui est logiquement antérieure. Robert Woodhouse (1773-1827), dont les réflexions sur l’algèbre comme système de signes avaient nourri le travail des *Analytics* à Cambridge, avait utilisé la même formulation au début du 19ème siècle pour affirmer l'antériorité logique de l'algèbre sur la géométrie !

La double série d'axiomes de la géométrie projective et de la géométrie métrique est ainsi philosophiquement légitimée par la nécessité de garantir à la fois les conditions de l'expérience et le caractère absolu du point de vue conceptualiste et réaliste en géométrie.

Les axiomes de la géométrie projective représentent les conditions *a priori* qui assurent la possibilité de réaliser l'expérience de la seule exteriorité, c'est-à-dire du monde extérieur en tant que tel, ou encore, qui sous-tendent donc toute comparaison spatiale qualitative. Russell les énonce ainsi :

I• *We can distinguish different parts of space, but all parts are qualitatively similar, and are distinguished only by the immediate fact that they lie outside one another.*
II• *Space is continuous and infinitely divisible ; the result of infinite division, the zero of extension, is called a* point.
III• *Any two points determine a unique figure, the straight line ; any three en general determine a unique figure, the plane. Any four points determine a corresponding figure of three dimensions. and for aught that appears to the contrary, the same may be true of any number of points. But this process comes to an end, sooner or later, with some number of points which determine the whole of space. For if this were not the case, no number of relations of a point to a collection of given points could ever determine its relation to fresh points, and Geometry would become impossible* [§ 122].

Les axiomes de la géométrie métrique assurent, quant à eux, les conditions de l'expérience de mesure. Russell les présente comme un compromis entre l'énonciation donnée par Helmholtz et celle donnée par Sophus Lie (1842-99). En dehors du fait qu'un élément empirique entre dans le concept de distance en géométrie métrique, les deux couples d'axiomes sont équivalents, et ce sens qu'ils assurent le même type de structuration des formes d'extériorité les unes par rapport aux autres. Il s'agit de l'axiome de l'homogénéité de l'espace, de l'axiome affirmant que le nombre de dimensions de l'espace est fini, et de l'axiome de la distance considérée comme relation invariante entre deux points.

Conclusion

L'*Essay on the Axioms of Geometry* de Russell apparait donc comme une ultime tentative d'imposer, grâce à la philosophie de Kant, un fondement géométrique de la connaissance, au nom d'une conception réaliste qui conserve le caractère de réalité absolue à l'espace qualitatif de la géométrie projective. En transfèrant à la géométrie projective la fonction de vérité transcendantale assurée par la géométrie euclidienne au moment de la réforme des années 1850, Russell réalise un travail de médiation tout à fait conséquent entre les nouvelles recherches géométriques qui sont élaborées, diffusées et discutées dans la seconde moitié du 19ème siècle et cette conception réaliste dominante dans les institutions de l'enseignement universitaire de Cambridge, où cet *Essay* est rédigé.

La première question posée dans mon introduction participait finalement d'une conception quelque peu récurrente de l'histoire : pourquoi Russell, aujourd'hui reconnu comme logicien, a-t-il d'abord écrit un ouvrage de géométrie ? La seconde semble une question historiquement plus pertinente : pourquoi le jeune Russell a-t-il basculé en trois ans d'une conception descriptive des fondements de la connaissance, fondée sur la géométrie projective, à une conception symbolique, fondée sur la formalisation systématique de la logique ? C'est en effet dès 1902 qu'il signale à Frege le paradoxe qui sape l'édification logique du second volume de ses *Grundgesetze der Arithmetik, begriffsschriftlich abgeleitet,* et il travaille dès 1900 à la rédaction de ses *Principles of Mathematics,* parus en 1903. Répondre à cette seconde question supposerait d'analyser plus avant, non seulement, la façon dont Russell évolue personnellement vers cette nouvelle conception, mais la transformation des conditions de l'enseignement des mathématiques à Cambridge au tournant du 20ème siècle. Outre les débats très serrés avec Poincaré dans la *Revue de Métaphysique et de Morale,* qui ont pu contribué à déstabiliser sa position [Nabonnand, 2000], Russell dira plus tard que, dans son rapport sur ce texte, Whitehead l'avait sévèrement, mais justement critiqué, et qu'il en avait lui-même conclu qu'il était sans valeur. Sa rencontre avec le milieu international des mathématiciens a également pu transformer sa façon de percevoir la géométrie. Frege était lui aussi l'auteur d'un premier travail sur la géométrie projective en 1873 [Belna, 2002], mais dans une perspective beaucoup plus ouverte à la fonction opératoire des mathématiques. Et la publication en 1899 des *Grundlagen der Geometrie* de David Hilbert (1862-1943) en fournit une légitimation axiomatique qui change radicalement la donne quant au statut descriptif ou opératoire des mathématiques. C'est l'ensemble de ces nouvelles perspectives que rencontre Russell en 1900, et qui a sans doute jouer un rôle de catalyseur essentiel à son retournement de point de vue. Ces questions restent ouvertes, et constituent la trame d'une recherche à venir.

Bibliographie

Sources primaires

• Babbage, Charles. 1989. *The Works of Charles Babbage*, sous la direction de Martin Campbell-Kelly, London, William Pickering, 11 vols.

• Ball, Robert S., 1887-92, "On the Theory of Content", *Transactions of the Royal Irish Academy,* 29, 123-82.

• Bradley, Francis E., 1883, *Principles of Logic,* London, Oxford University Press, 2 vols.

• Cayley, Arthur, 1893, *Collected Mathematical Papers,* Cambridge, Cambridge University. Press.

- id., 1847, "On certain Formulæ for Differentiation, with applications to the evaluation of Definite Integrals", *Camb. and Dublin Math. Jrnl,* 2, 122-28, *Collected Mathematical Papers,* 1, 267-72.

- id., 1858, "A Memoir on the Theory of Matrices", *Phil. Trans.,* 148, 17-37, *Collected Mathematical Papers,* 2, 475-96.

- id., 1859, "A Sixth Memoir upon Quantics", *Phil. Trans. of the R.S.,* n° 149, pp. 61-90. *Collected Mathematical Papers,* 2, 497-505.

- id., 1864, "On the notion and boundaries of algebra", *Quaterly Jrnl of Pure and Applied Maths,* 4. *Collected Mathematical Papers,* 5, 292-94.

- id., 1865, "Note on Lobatchevsky's Imaginary Geometry", *Philosophical Magazine,* 29, 231-33. *Collected Mathematical Papers*, 6, 471-72

- id., 1869, "On Abstract Geometry", *Phil. Trans. of the R.S.,* n° 65, 1870, 51-63. *Collected Mathematical Papers,* 6, .452-65.

- id., 1883, "Presidential address", *Report of the 53th Meeting of the B.A.A.S. held at Southport in Septembre 1883.* London, John Murray, 1884. 3-37. *Collected Mathematical Papers,* 11, 429-59.

• Clifford, William K., 1874, "The Philosophy of the Pure Sciences. Part 1 : The Statement of the Question", *Contemporary Review,* 24, 712-27.

- id., 1875, "The Philosophy of the Pure Sciences. Part 2 : The Postulates of the Science of Space", *Contemporary Review,* 25, 360-76.

- id., 1879, "The Philosophy of the Pure Sciences. Part 3 : The Universal Statement of Arithmetic", *Nioneteenth Century,* 5, 513-22.

- id., 1872 : "On the Aims and Instruments of Scientific Thoughts", *Macmillan's Magazine,* 26, 499-512.

- id., 1873, "The Unreasonable", *Nature,* 7, 282.

- id., 1873 : "Preliminary Sketch of Biquaternions", *Proceedings of the London Mathematical Society*, vol. IV, n° 64-65, pp. 381-95, *Mathematical Papers*, 1882, 181-83.
- id., 1876 : "Further Note on Biquaternions", *Mathematical Papers*, 1882, 391-92.
• Couturat, Louis, 1898, "Essai sur les fondements de la géométrie par Bertrand Russell", *Revue de Métaphysique et de Morale*, 6, 354-80.
• De Morgan, Augustus, 1837-42a, "On the Foundations of Algebra, I", *Trans. of the Camb. Phil. Soc.*, 7, 173-87.
-id., 1837-42b, "On the Foundations of Algebra, II", *Trans. of the Camb. Phil. Soc.*, 7, 287-300.
- id., 1844-49a, "On the Foundations of Algebra, III", *Trans. of the Camb. Phil. Soc.*, 8, 139-42.
- id., 1844-49c, "On the Foundations of Algebra, IV, on Triple Algebra", *Trans. of the Camb. Phil. Soc.*, 8, 241-54.
• Forsyth, Andrew R., 1895, ""Arthur Cayley", in Cayley, A., 1893, *Collected Mathematical Papers*, 8, ix-xliv.
• Frege, Gottlob, 1893-1903, *Grundgesetze der Arithmetik, begriffschrifftlich algeleitet*, Jena, Pohle, 2 vols.
• Gauss, Carolo Friderico & Schumacher H.C., 1860-64, *Briefwechsel zwischen K. F. Gauss and H. C. Schumacher.* Altona, C. A. F. Peters.
• Grassmann, Hermann G., 1994, *La science de la grandeur extensive, Lineale Ausdehnungslehre.* Paris. Blanchard. (éd.) D. Flament. Traduction française de B. Bekemeier.
• Herschel, John F. W., 1830, *A Preliminary Discourse on the Study of Natural Philosophy*, The Cabinet Cyclopaedia, vol. 1, London.
• Helmholtz, Hermann von, 1870, "The Axioms of Geometry",*The Academy*. n°1, 128-31.
- id., 1872, "The Axioms of Geometry",*The Academy*. n°3, 52-53.
- id., 1876, "The origin and meaning of Geometrical Axioms", *Mind*, 1, 301-21.
- id., 1878, "The origin and meaning of Geometrical Axioms", *Mind*, 3, 212-25.
• Jevons, William Stanley, 1871, "Helmholtz on the Axioms of Geometry", *Nature*, 4, 481-82.
• Kelland, John, 1863, "On the Limits of our Knowledge respecting the Theory of Parallels", *Transactions of the Royal Society of Edinburgh*, 1861-64, n° 23,433-50.
• Klein, Félix, 1871, "Ueber die sogenannte Nicht-Euklidische Geomerie", *Mathematische Annalen*,. 4, 573-625.
- id., 1873, "Ueber die sogenannte Nicht-Euklidische Geomerie", *Mathematische Annalen*, 6, 112-45.
- id., 1974 (1872), *Le programme d'Erlangen*, Paris, Gauthier-Villars. Préface de J. Dieudonné. Postface de P. François Russo.
• Lobatchewski, Nikolai, 1837, " Géométrie imaginaire", *Journal fur die Reine und Angewandte Mathematik*, vol 17, 295-320.
- id., 1866, *Etudes géométriques sur la théorie des parallèles, suivi d'un extrait de la correspondance de Gauss et de Schumacher*, Paris, Gauthier-Villars. Traduction J. Houël.
• Locke, John, *Essay on Human Understanding*, London, 2d éd., 1694, trad. fr. 1983 : *Essai philosophique sur l'entendement humain*, M. Coste, 1700, Paris, 5ème éd. 1755.
• McMackin Garland, M., 1980, *Cambridge before Darwin, the Ideal of a Liberal Education, 1800-1860*, Cambridge.

• Peacock, George, 1820, *A Collection of Examples on the Calculus of the Applications of the Differential and Integral Calculus*, Cambridge. 3ème partie, Babbage, *Works*, 1, 283-326.
- id., *Treatise of Algebra,* Cambridge, 1830. Rééd. 2 vol.,1842-45.
- id., 1833, "A Report on the recent progress and actual state of certain branches of analysis", *Proceedings of the British Association for the Advancement of Science*, London, 185-351.
- id., *Report on the recent progress and actual state of certain branches of analysis*, Cambridge, 1834.
- id., *Observations on the Statutes of the University of Cambridge,* Cambridge, 1841.
• Riemann, Bernhard, 1866, "Uber die Hypothesen, welche der Geometrie zu Grunde liegen", *Abhandlungen der Koniglichen Gesellschaft der Wissenschafter zu Göttingen,* 1867, 13, 132-52.
• Russell, Bertrand, "Observations on Space and Geometry", Berlin March 1895", *Bertrand Russell Archives,* McMaster University, Hamilton, Ontario.
- id., 1983, *The Collected Papers of Bertrand Russell,* London, Allen & Unwin.
- id., 1996, *The Collected Papers of Bertrand Russell,* London and New-York, Routledge.
- id., 1897, An Essay on the Foundations of Geometry, Cambridge, Cambridge University Press. 1996, London and New York, Routledge. 1901, traduction française de A. Cadenat, Paris, Gauthier-Villars.
- id., 1898, "Les axiomes propres à Euclide sont-ils empiriques ?", *Revue de métaphysique et de morale,* 6, 759-76.
- id., 1899, "Sur les axiomes de la géométrie", *Revue de métaphysique et de morale,* 7, 684-707.
- id., 1948, "A turning point in my life", *The Saturday Book,* 8, p. 142-46.
• Russell, Bertrand, & Whitehead, Alfred North, 1903-1913, *Principia Mathematica,* Cambridge, . 4 vols.
• Salmon, George, 1866, "On some points in the theory of elimination", *Quaterly Journal of Pure and Applied Mathematics,* 7, 327-37.
• Spottiswoode, William, "Presidential Address", *Report for the 48th Meeting of the BAAS held at Dublin in August,* 1878. London. John Murray. 1879, 1-32.
• Tillyard, Alfred I., 1913, *A History of University Reform from 1800 to the Present Time, with suggestions towards a complete scheme for the University of Cambridge,* Camb. Un. Press, Cambridge.
• Whewell, William, "Whewell Papers”, *Trinity College Library,* Cambridge. Add. Ms. a. 5888. Lettre de Peacock à Whewell du 14 octobre 1841.
- id., 1833, *Astronomy and General Physics Considered witth Refrence to Natural Theology,* London, W. Pickering.
- id., 1835, *Thoughts on the Study of Mathematics as Part of a Liberal Education*, Cambridge.
- id.,1837, *History of the Inductive Sciences, from the Earliest to the Present Times*, London, 3 vols.
- id., 1840, *The Philosophy of the Inductive Sciences, founded upon their History*, London, 2 vols.
-id., (1845), 1850, *On a liberal education in general, and with particular reference to the leading studies in the University of Cambridge,* Cambridge.
• Woodhouse, Robert,1801, "On the Necessary Truth of certain Conclusions obtained by means of imaginary quantities", *Phil. Trans.,* 91, 89-120.

- id., 1802, "On the Independance of the Analytical and Geometrical Methods of Investigation, and on the Advantages to be Derived from their Separation", *Phil. Trans.*, 92, 85-125.

Sources secondaires

• Becher, Harvey W., 1971, *W. Whewell and Cambridge Mathematics*, Diss. Abs., Un. of Missouri, Columbia
- id., 1980, "William Whewell and the Cambridge Mathematics", *HSPS*, n° 11-1, 1-48.
• Belna, Jean-Pierre, 2002, "Frege et la géométrie projective : la Dissertation inaugurale de 1873", *Revue d'Histoire des Sciences*, 55/3, 379-410..
• Boï, Luciano, 1997,"Clifford et la théorie des biquaternions", in (éd.) Flament, Dominique, *Le nombre, une hydre à n visages*, Editions de la Maison des Sciences de l'Homme.
• Durand(-Richard), Marie-José, 1990, "Genèse de l'Algèbre Symbolique en Angleterre : une Influence Possible de John Locke", *Revue d'Histoire des Sciences*, 43, n°2-3, 129-80
• Durand-Richard, Marie-José, 1992, Charles Babbage (1791-1871) : de l'Ecole algébrique anglaise à la "machine analytique", *Mathématiques, Informatique et Sciences Humaines*, 1992, 30° année, n° 118, 5-31 ; et n° 120, 79-82.
-id., 1996, L'Ecole Algébrique Anglaise : les conditions conceptuelles et institutionnelles d'un calcul symbolique comme fondement de la connaissance, in (éd.) C. Goldstein, J. Gray, J. Ritter, *L'Europe mathématique - Mythes, histoires, identités*, Paris, Editions de la Maison des sciences de l'homme.
- id., 2000, Logic versus algebra : English debates and Boole's mediation, *Anthology on Boole*, (ed.) James Gasser, Kluwer Academic Publishers, Synthese Library, 139-166
- id., 2001, "Révolution industrielle : logique et signification de l'opératoire", *Mélanges en l'honneur d'Ernest Coumet*, Paris, n° spécial de la *Revue de Synthèse*, "Histoire des jeux, jeux de l'histoire", T. 122, 4e S. n° 2-3-4, avril-décembre 2001, Centre International de Synthèse, Albin Michel.
• Gascoigne, John, *Cambridge in the age of the Enlightenment, Science, religion and politics from the Restoration to the French Revolution*, Cambridge, Cambridge University Press, 1989.
• Nabonnand, Philippe, 2000, "La polémique entre Poincaré et Russell au sujet du statut des axiomes de la géométrie", *Revue d'histoire des mathématiques*, n° 6, 219-69.
• Richards, Joan, 1988, *Mathematical Visions, The Pursuit of Geometry in Victorian England*, San Diego, Academic Press Inc.